Álgebra III

Examen V

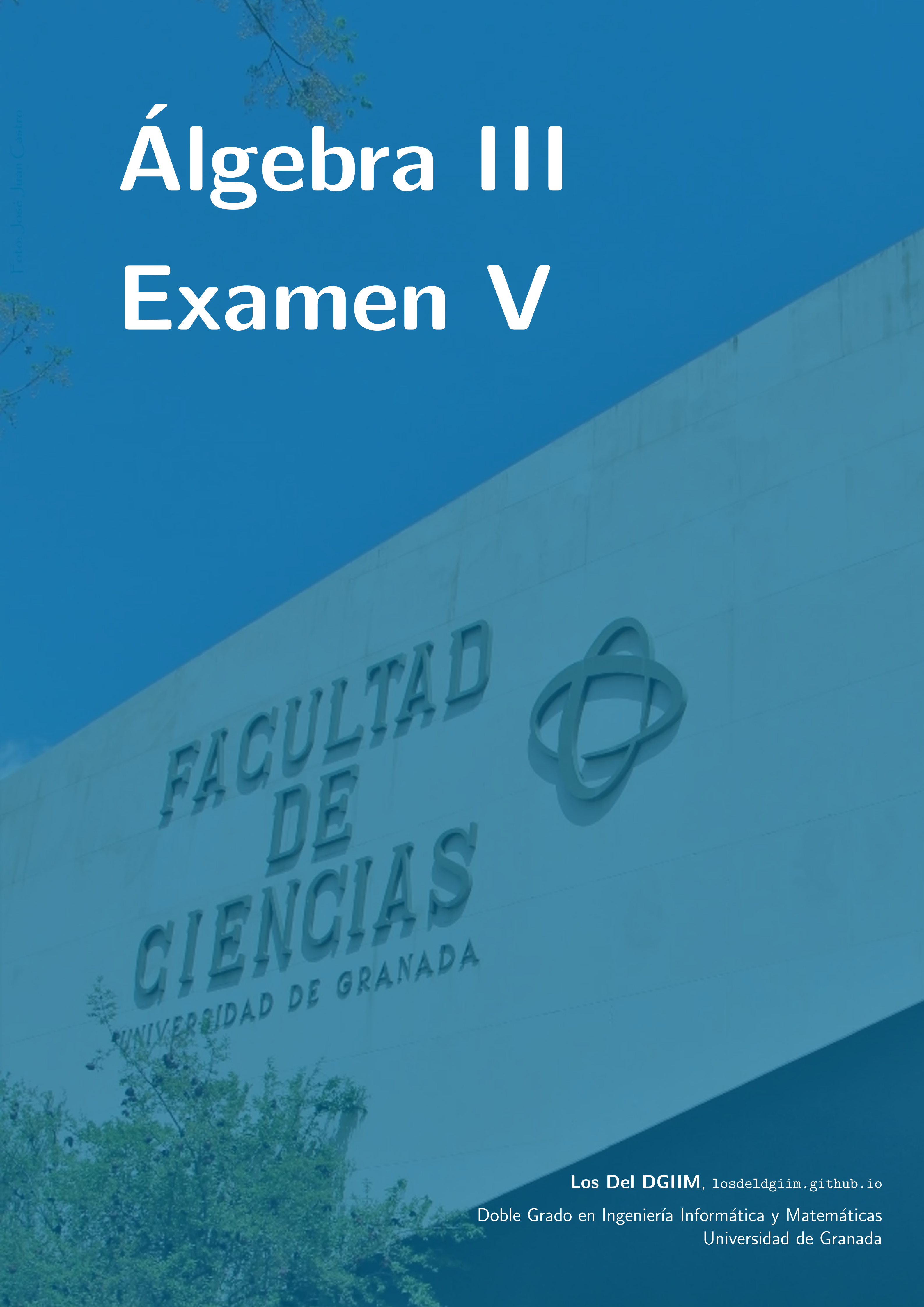


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra III
Examen V

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2022/23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1. Tomemos $f = x^3 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ y K el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de f.

a) Decidir razonadamente si $\sqrt{3} \in K$.

b) Describir los elementos del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

c) Calcular todos los subcuerpos de K. Señalar cuáles son extensiones de Galois de $\mathbb{Q}$.

d) Calcular el cardinal del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K(i))$.

Ejercicio 2. Consideremos el número real $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Decidir razonadamente si $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\frac{1}{\alpha^2+1})$

Ejercicio 3. Sea $g = x^3 + x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ y F un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{F}_3$ de g.

a) Describir los elementos del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_3}(F)$.

b) Calcular todos los subcuerpos de F.

c) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ son las raíces de g, decidir si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{F}_3$.

d) Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en F.

Ejercicio 4. Decidir razonadamente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) El número real $\sum_{n=1}^{8} \sqrt[n]{2}$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.

b) Si K es un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in F[x]$ y $\alpha \in K$, entonces $\mathrm{Irr}(\alpha, F)$ es un divisor de f.

c) Dada una torre de cuerpos $F \leqslant E \leqslant K$, si $F \leqslant E$ y $E \leqslant K$ son de Galois, entonces $F \leqslant K$ es de Galois.

d) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene grado 4 sobre $\mathbb{Q}$, entonces z es un número construible.

Solución.

Ejercicio 1. Tomemos $f = x^3 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ y K el cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de f.

a) Decidir razonadamente si $\sqrt{3} \in K$.

Las raíces de f son las raíces cúbicas de -3, es decir, $-\sqrt[3]{3}, -w\sqrt[3]{3}$ y $-w^2\sqrt[3]{3}$, donde w es una raíz cúbica primitiva de la unidad, por ejemplo:

$$w = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tenemos así que $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, w\sqrt[3]{3}, w^2\sqrt[3]{3}\right)$, pero como:

$$w = \frac{w\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$$

Observamos que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, w)$. Más aún, afirmamos que $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, i\sqrt{3}\right)$, que es claro en vista de la expresión de w. Si calculamos $[K : \mathbb{Q}]$ vemos por el Lema de la Torre que:

$$[K : \mathbb{Q}] = \left[K : \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right)\right]\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2 \cdot 3 = 6$$

ya que:

- $x^3 - 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ por Eisenstein para $p = 3$.
- $x^2 + 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right)[x]$ porque sus dos raíces son complejas.

Por reducción al absurdo, supuesto que $\sqrt{3} \in K$, tendríamos entonces que $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}, i\sqrt{3}\right) = K$, con $[K : \mathbb{Q}] = 6$, pero por el Lema de la Torre tenemos que:

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}, i\sqrt{3}\right) : \mathbb{Q}\right] = \left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}, i\sqrt{3}\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}\right)\right]\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}\right) : \mathbb{Q}\right]$$

donde la primera es 2 por ser x^2+3 irreducible e $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt{3}\right)$ ya que sus raíces son complejas y la segunda se ha visto en varias veces que es 6, puesto que podemos aplicar el Lema de la Torre para ver que es menor o igual que 6 y múltiplo de 2 y en el otro sentido para ver que también es múltiplo de 3. En definitiva, llegamos a que $6 = 12$, contradicción que viene de suponer que $\sqrt{3} \in K$.

b) Describir los elementos del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

Vemos que K es cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$, por lo que $\mathbb{Q} \leqslant K$ es de Galois, con lo que $|\,\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)| = |\,\mathrm{Aut}(K)| = [K : F] = 6$. Para calcular sus elementos aplicaremos en reiteradas ocasiones la Proposición de extensión, calculando primero los homomorfismos $\eta : \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right) \to K$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & K \\
 & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})
\end{tikzcd}$$

Como $x^3 - 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ encontramos 3 homomorfismos, η_j para $j \in \{0,1,2\}$; cada uno determinado por una raíz distinta de este polinomio en K:

$$\sqrt[3]{3} \overset{\eta_j}{\longmapsto} w^j \sqrt[3]{3}$$

Cada uno de ellos se extiende a un automorfismo $K \to K$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \arrow[r, "\eta_j"] \arrow[dr, hook] & K \\
& K
\end{tikzcd}$$

Como $x^2 + 3 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right)[x]$ es irreducible tenemos que cada η_j se extiende a dos automorfismos $\eta_{j,k}$ para $k \in \{0,1\}$, determinados por:

$$\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{j,k}}{\longmapsto} w^j \sqrt[3]{3}$$
$$i\sqrt{3} \overset{\eta_{j,k}}{\longmapsto} (-1)^k i\sqrt{3}$$

Así, tenemos que:

$$\operatorname{Aut}(K) = \{\eta_{j,k} : j \in \{0,1,2\}, k \in \{0,1\}\}$$

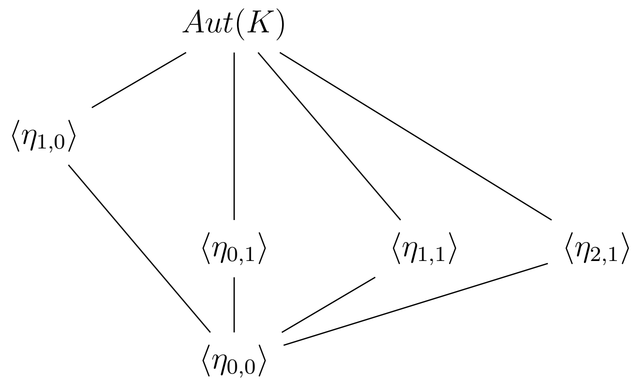
c) Calcular todos los subcuerpos de K. Señalar cuáles son extensiones de Galois de $\mathbb{Q}$.

Como $\mathbb{Q} \leqslant K$ es de Galois, cada subcuerpo de K está en correspondencia biunívoca con un único subgrupo de $\operatorname{Aut}(K)$. Por tanto, calculamos primero todos los subgrupos de $\operatorname{Aut}(K)$. Para ello, primero calculamos los órdenes de los automorfismos. Sabemos que $\operatorname{Aut}(K)$ es un subgrupo de S_3 y como $|\operatorname{Aut}(K)| = [K : \mathbb{Q}] = 6$ tiene que ser $\operatorname{Aut}(K) \cong S_3$, por lo que hay dos elementos de orden 3 y 3 de orden 2.

- Claramente $\eta_{0,1}$ es de orden 2.
- Para $\eta_{1,0}$:
$$\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,0}}{\longmapsto} w\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,0}}{\longmapsto} w^2 \sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,0}}{\longmapsto} w^3 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$
Por lo que tiene orden 3.
- Para $\eta_{1,1}$:
$$\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,1}}{\longmapsto} w\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,0}}{\longmapsto} w^2 w\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$
Por lo que tiene orden 2.
- Para $\eta_{2,0}$:
$$\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{2,0}}{\longmapsto} w^2 \sqrt[3]{3} \overset{\eta_{2,0}}{\longmapsto} w^4 \sqrt[3]{3} = w\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{2,0}}{\longmapsto} w^3 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$
Por lo que tiene orden 3.
- Tiene que ser por tanto $\eta_{2,1}$ de orden 2.

$\eta_{0,0}$	$\eta_{0,1}$	$\eta_{1,0}$	$\eta_{1,1}$	$\eta_{2,0}$	$\eta_{2,1}$
1	2	3	2	3	2

Así, los subgrupos de $\mathrm{Aut}(K)$ son:



Buscamos ahora los subcuerpos asociados a cada subgrupo:

- Para $K^{\langle \eta_{1,0} \rangle}$ buscamos un subcuerpo de grado 2 que quede fijo por $\langle \eta_{1,0} \rangle$. Observamos que $\mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right) \leqslant K^{\langle \eta_{1,0} \rangle}$, con $\left[\mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2$, por lo que este debe ser el subcuerpo.
- Para $K^{\langle \eta_{0,1} \rangle}$ buscamos un subcuerpo de grado 3. Observamos que se cumple $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right) \leqslant K^{\langle \eta_{0,1} \rangle}$, con $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{3}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$, por lo que este debe ser el subcuerpo asociado.
- Para $K^{\langle \eta_{1,1} \rangle}$ buscamos otro subcuerpos de grado 3. Observamos que:
$$\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,1}}{\longmapsto} w\sqrt[3]{3}, \qquad w \overset{\eta_{1,1}}{\longmapsto} w^2$$
Con lo que:
$$w^2\sqrt[3]{3} \overset{\eta_{1,1}}{\longmapsto} w^5\sqrt[3]{3} = w^2\sqrt[3]{3}$$
de donde $\mathbb{Q}\left(w^2\sqrt[3]{3}\right) \leqslant K^{\langle \eta_{1,1} \rangle}$ y $\left[\mathbb{Q}\left(w^2\sqrt[3]{3}\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$ porque $x^3 - 3$ es irreducible.
- Para $K^{\langle \eta_{2,1} \rangle}$ vemos de forma análoga al caso anterior que $K^{\langle \eta_{2,1} \rangle} = \mathbb{Q}\left(w\sqrt[3]{3}\right)$.

d) Calcular el cardinal del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K(i))$.

Ejercicio 2. Consideremos el número real $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Decidir razonadamente si $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\frac{1}{\alpha^2+1})$

Ejercicio 3. Sea $g = x^3 + x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ y F un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{F}_3$ de g.

a) Describir los elementos del grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_3}(F)$.

b) Calcular todos los subcuerpos de F.

c) Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ son las raíces de g, decidir si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{F}_3$.

d) Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en F.

Ejercicio 4. Decidir razonadamente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) El número real $\sum_{n=1}^{8} \sqrt[n]{2}$ es algebraico sobre $\mathbb{Q}$.

b) Si K es un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in F[x]$ y $\alpha \in K$, entonces $\mathrm{Irr}(\alpha, F)$ es un divisor de f.

c) Dada una torre de cuerpos $F \leqslant E \leqslant K$, si $F \leqslant E$ y $E \leqslant K$ son de Galois, entonces $F \leqslant K$ es de Galois.

d) Si $z \in \mathbb{C}$ tiene grado 4 sobre $\mathbb{Q}$, entonces z es un número construible.